Universidad Simón Bolivar. Departamento de matemáticas.

Primer parcial. Matemática VII 2:30-4:00 Miércoles 6 de febrero de 2008

Este examen vale 25 puntos para un total de 100 puntos.

Nombre:
Carnet:

1 (3pt) Calcula la segunda derivada generalizada de $f(x) = \frac{x+|x|}{2}$

a) $H(x)$

b) $-H(x)$

c) $\delta(x)$

d) $H(x) + \delta(x)$

Solución

La primera derivada es $H(x)$ y la segunda la $\delta(x)$.

2 (4pt) El producto de convolucion de $H(x)$ con $H(x)\,\mathrm{sen}(x)$ es

a) $2H(x)\,\mathrm{sen}^2(x/2)$

b) $H(x)(\cos(x) - 1)$

c) $H(x)\cos(x + 1)$

d) $H(x)\cos(x - 1)$

Solución

Nota: incialmente la pregunta estaba redactada diferente, decia producto de convolución de $H(x)$ con $H(x)\cos(x)$, la respuesta correcta era $H(x)\,\mathrm{sen}(x)$.

Apliquemos la definición:

$$H(x) * H(x)\,\mathrm{sen}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} H(x-t)\,\mathrm{sen}(x-t)H(t)dt = H(x)\int_0^x \mathrm{sen}(x-t)dt =$$
$$H(x)(1-\cos(x)) = 2H\,\mathrm{sen}^2(x/2)$$

El truco en este ejercico es darse cuenta de que se necesitaba una identidad trigonométrica, siento el error.

3 (4pt) El límite $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{1+n^2x^2}$ es:

a) $\pi\delta(x)$

b) $\delta(x)$

c) $2\delta(x)$

d) $\delta'(x)$

Solución

Este es idéntico a uno que hemos hecho en las prácticas. Considera la función $f(x) = 1/(\pi(1+x^2))$ entonces $nf(nx)$ tiende a la $\delta(x)$. La respuesta adecuada es la a). ¿Porqué el π?

4 (4pt) ¿Cuanto vale $u(1)$ si $u(x)$ es causal y satisface $u_g''(x) = \delta(x) + 3\delta(x+1) - \delta(x-2)$

a) 3

b) 7

c) -3

d) 12

Solución

Integramos dos veces (como hemos hecho en una práctica) y obtenemos:

$$u(x) = xH(x) + 3(x+1)H(x+1) - (x-2)H(x-2) \Rightarrow u(1) = 7$$

5 (4pt) La distribución $\cos(x)\delta''(x-2)$ es:

a) $-\cos(2)\delta(x-2)+2\,\mathrm{sen}(2)\delta'(x-2)+\cos(2)\delta''(x-2)$

b) $-\cos(2)\delta(x-2)-2\,\mathrm{sen}(2)\delta'(x-2)+\cos(2)\delta''(x-2)$

c) $-\cos(2)\delta(x-2)+2\,\mathrm{sen}(2)\delta'(x-2)-\cos(2)\delta''(x-2)$

d) $\cos(2)\delta(x-2)+2\,\mathrm{sen}(2)\delta'(x-2)-\cos(2)\delta''(x-2)$

Solución

Otro error mio. Habia eliminado el 2 delante del $\mathrm{sen}(2)\delta'(x-2)$. La respuesta correcta es la a). El ejercicio resuleto lo tienen en otro examen modelo.

6 (4pt) La integral de $I=\int_{-2}^{4}|(x-2)(x+1)|e^{-|x|}dx$ da

a) $-e^{-2}-19e^{-4}+10e^{-1}$

b) $e^{-2}-19e^{-4}-10e^{-1}$

c) $-e^{-2}-e^{-4}+10e^{-1}$

d) $-e^{-2}+e^{-4}-10e^{-1}$

Solución

Hay muchas maneras de hacer una integral, voy a hacerlo de una un poco rara. Nota primero que si $f(x)=e^{-|x|}$ entonces $f_g''(x)=f(x)+2\delta(x)$. Ahora define la función

$$g(x)=|(x-2)(x+1)|1_{(-2,4)}(x)$$

Entonces

$$I=\int_{-\infty}^{\infty}g(x)f(x)dx=\int_{-\infty}^{\infty}g(x)(f_g''(x)-2\delta(x))dx=\int_{-\infty}^{\infty}g(x)f_g''(x)dx+4$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}g_g''(x)f(x)dx+4$$

Sólo hay que calcular una segunda derivada distrubucional. Pero no es difícil:

$$g_g''(x)=\begin{cases}2 & \text{si} \quad -2<x<-1\\ -2 & \text{si} \quad -1<x<2\\ 2 & \text{si} \quad 2<x<4\end{cases}$$
$$+6\delta(x+1)+6\delta(x-2)+4\delta'(x+2)-10\delta'(x+4)-5\delta(x+2)-7\delta(x+4)$$

De manera que

$$I=4+6e^{-1}+6e^{-2}-4e^{-2}-10e^{-4}-5e^{-2}-7e^{-4}+$$
$$2\int_{-2}^{-1}e^{x}dx-2\int_{-1}^{0}e^{x}dx-2\int_{0}^{2}e^{-x}dx+2\int_{2}^{4}e^{-x}dx=$$
$$4+6e^{-1}-3e^{-2}-17e^{-4}+2(e^{-1}-e^{-2})-2(1-e^{-1})-2(1-e^{-2})+2(e^{-2}-e^{-4})=$$
$$10e^{-1}-e^{-2}-19e^{-4}$$

7 (2pt) ¿Cuanto vale el producto de convolución $(\delta_{-1}*f)(x)$?

a) $f(1)$

b) $f(x-1)$

c) $f(-1)$

d) $f(1+x)$

Solución

Simplemente hacemos el cálculo:

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x-s)\delta(s+1)ds=f(x+1)=f(1+x)$$